GEOMETRIE

Mercier Dany-Jack
TC2

2

marque déposée

le Calligraphe

cahier _____

école _____

classe _____

nom _____

CAHIERS SCOLAIRES NF 64

No 103

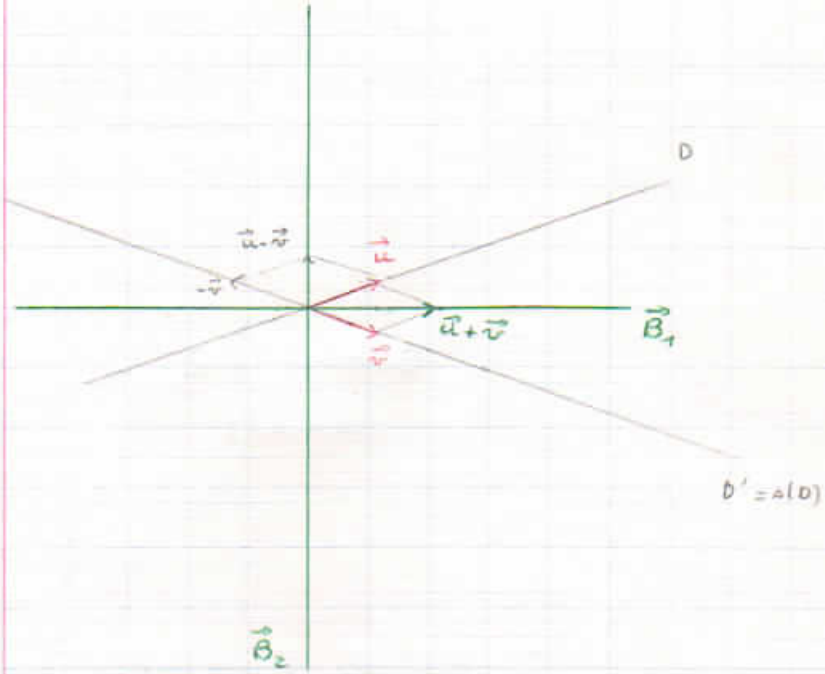
016

GEOMETRIE
(Suite)

COURS DE TERMINALE C
DE MME J. MANOTTE

recopié et présenté par D.-J. MERCIER

1974 - 75


D
$\vec{u}-\vec{v}$
$\vec{u}$
$-\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v}$
$\vec{B}_1$
$\vec{v}$
$D' = s(D)$
$\vec{B}_2$

$\theta + \theta = \gamma + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad \theta \in \mathbb{R}$

$2\theta = \gamma + k\pi$

inc. donné

$\theta = \frac{\gamma}{2} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\exists$ 2 droites bissectrices (ou 4 demi-droites vectorielles)

Pratiquement, pour les trouver par le calcul, on utilise les symétries vectorielles.

Un vecteur directeur de $\vec{B}_1$ est $\vec{u} + \vec{v}$ — Prendre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires !

Un vecteur directeur de $\vec{B}_2$ est $\vec{u} - \vec{v}$

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, par exemple ;

$\vec{u} \in \vec{D}$; et $\vec{v} \in \vec{D}'$

17. 4

Ensemble des points M de P tels que $(A, B) \in P^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α donné, (MA, MB) a pour mesure α.

$$\alpha = \text{mes}(MA, MB)$$

1°) Remarque : A et B ne peuvent être considérés comme points de l'ensemble.

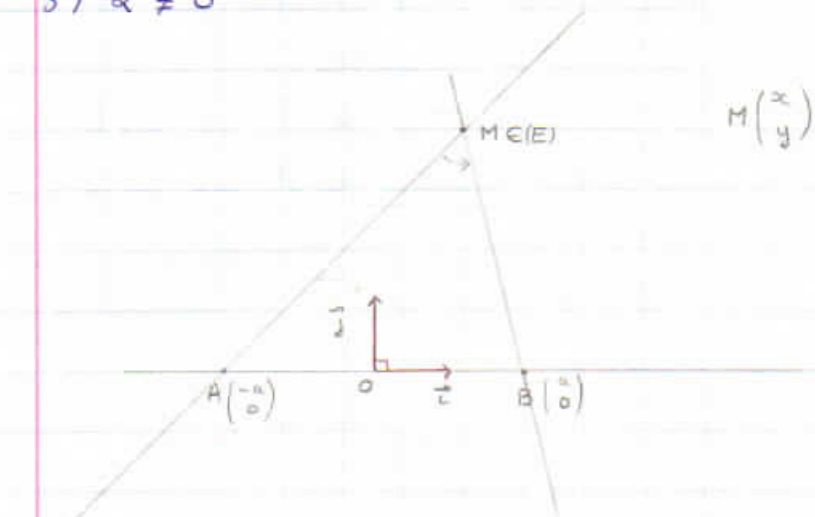
ex : $M = A \vdash$ droite (MA) non définie.

2°/ $\alpha = 0$

$\alpha = 0 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$E = (AB) - \{A, B\}$

3°/ $\alpha \neq 0$



$$\text{mes}(MA, MB) = \alpha \mapsto \begin{cases} \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + k2\pi \\ \underline{\text{ou}} \\ \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\alpha + \pi) + k2\pi \end{cases} \quad (1)$$

$k \in \mathbb{Z}$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-a-x\\-y\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}a-x\\-y\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\cos(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \dfrac{x^2-a^2+y^2}{\|\overrightarrow{MA}\|\cdot\|\overrightarrow{MB}\|}\\ \sin(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \dfrac{2ay}{\|\overrightarrow{MA}\|\cdot\|\overrightarrow{MB}\|}\end{cases}$$

$\text{mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) - \alpha = 0 + k2\pi$ ou $\pi + k2\pi$ (voir (1))

Ceci est équivalent à

$$\sin\left[\text{mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) - \alpha\right] = 0$$

Rappel

$\cos(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \cos \text{mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$

$$\sin \text{mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\cdot\cos\alpha - \cos \text{mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\cdot\sin\alpha = 0$$

$$\frac{2ay}{\|\overrightarrow{MA}\|\cdot\|\overrightarrow{MB}\|}\cos\alpha - \frac{x^2-a^2+y^2}{\|\overrightarrow{MA}\|\cdot\|\overrightarrow{MB}\|}\sin\alpha = 0$$

$\sin\alpha \neq 0$,

$$x^2+y^2-a^2 - 2ay\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

$$x^2 + \left(y - a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{x^2 + \left(y - a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}}$$

$M \in \mathcal{C}$, cercle de centre $\omega(0, a \operatorname{cotg} \alpha)$ et de rayon $R = \dfrac{a}{|\sin\alpha|}$

$A \in \mathcal{C}$? $A(-a, 0)$

$$a^2 + \left(-a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - \frac{a^2}{\sin^2\alpha} = 0 \ ?$$

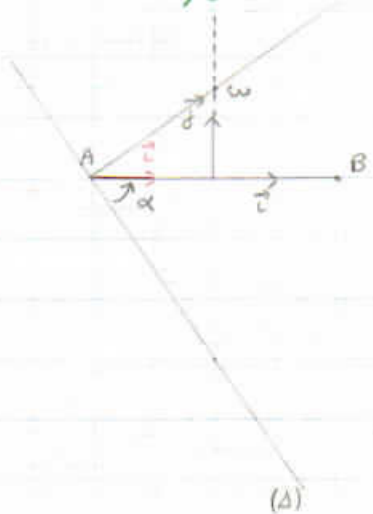
$$a^2 + a^2\left(\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}\right) = 0 \quad \text{oui}$$

idem, $B \in \mathcal{C}$.

Tous les points du cercle sauf A et B conviennent

$E = \mathcal{C} - \{A, B\}$

Construction pratique du centre du cercle à partir des seules données A, B et α



Soit (Δ, AB) qui a pour mesure α

$\exists\ r \ / \ r(\vec{i}) = \vec{i}$; angle de r mesuré par α.

$\exists\ r^{-1} \ / \ r^{-1}(\vec{i}) = \vec{u}$; mesure angle $(\vec{i}, \vec{u}) = -\alpha$

$$M_{(r^{-1}; \vec{i}, \vec{j})} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

$r^{-1}(\vec{i}) = \vec{u}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$

Comparons les direction des droites (ωA) et (Δ) :

$$\overrightarrow{\omega A} \begin{pmatrix} -a \\ -a\cot g\,\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{u} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\omega A} \cdot \vec{u} = -a\cos\alpha + a\cos\alpha = 0$

$(\Delta) \perp (\omega A)$

Donc (Δ) tangente au cercle $\mathcal{C}$.

On utilise cette propriété pour la construction pratique de ω :

AB, puis (Δ), puis $(A\omega)$, puis médiatrice de AB ; intersection.

Ensemble E_1 des M de P tels que $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + k2\pi$

si $\alpha \neq 0\ [2\pi]$
et $\alpha \neq \pi\ [2\pi]$

car $\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{2a\,\Delta}{\|\overrightarrow{MA}\| \times \|\overrightarrow{MB}\|}$

* $E_1 \subset E$, c'est sûr.

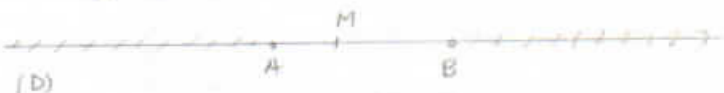
* E_1 est l'un des deux arcs $\overset{\frown}{AB}$; les points de l'un des arcs ont des y positifs, sur l'autre, $y < 0$, donc $\sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ a, ou non, le signe de $\sin\alpha$, donné. On choisit celui des 2 arcs qui donne l'égalité des signes, donc l'égalité des sinus.

E_1 = un des arcs $\overset{\frown}{AB} - \{AB\}$

* si $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$

$E_1 = (D) - [AB]$

* si $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$



$E_1 = (D) - [AB] =]AB[$

24.4 13 Isométries

Définition $\mathcal{S}$ isométrie de E ssi elle "conserve la distance".

$$\mathcal{S} : E \longrightarrow E$$
$$A \longmapsto A' = \mathcal{S}(A)$$
$$B \longmapsto B' = \mathcal{S}(B)$$

$d(A', B') = d(A, B)$ ou $AB = A'B'$

et ceci $\forall (A, B) \in E^2$

Propriétés

① Conservation du produit scalaire.

$(A, B) \in \overrightarrow{AB}$

$(A, C) \in \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = p$ $\qquad C' = \mathcal{S}(C)$

$\overrightarrow{A'B'} . \overrightarrow{A'C'} = p'$

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 \right]$$

$$\overrightarrow{A'B'} . \overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'B'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'C'}\|^2 \right]$$

Il sera préférable de choisir les vecteurs initiaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de façon que leur somme soit visible.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right]\\ \overrightarrow{B'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'} &= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{B'C'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'B'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'C'}\|^2\right]\end{aligned}\right\} \vdash \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B'A'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$$

car $BC = B'C' \mapsto \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{B'C'}\|$

② Toute isométrie est une bijection affine.

* $(O, I, J, K) \in E^4 \vdash (O', I', J', K')$ avec
$O' = f(O)$, $I' = f(I), \dots, K' = f(K)$, et f isométrie,
Si le quadruplet initial est un repère orthonormé de E, le second l'est aussi (cf P1)

* On se donne (O, I, J, K) repère orthonormé.
$\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$,
$\forall M \in E$, $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
Soit $\vec{\imath}' = \overrightarrow{O'I'}$, $\vec{\jmath}' = \overrightarrow{O'J'}$, $\vec{k}' = \overrightarrow{O'K'}$
$M' = f(M)$
$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath} = x\\ \overrightarrow{O'M'}\cdot\vec{\imath}' = x'\end{cases}$$

$$\left.\begin{cases}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI} = x\\ \overrightarrow{O'M'}\cdot\overrightarrow{O'I'} = x'\end{cases}\right\} \vdash x = x'$$

idem $y' = y$

$z' = z$

$\forall M'(x, y, z)$ dans $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') = \mathcal{R}'$, $\exists ! \, M(x, y, z)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \mathcal{R}$.

f, l'isométrie donnée, est donc une bijection.

Introduisons l'endomorphisme φ de $\vec{E}$ ainsi défini :

φ [$\vec{i}' = \varphi(\vec{i})$, $\vec{j}' = \varphi(\vec{j})$, $\vec{k}' = \varphi(\vec{k})$

Voyons si f est affine et associée à φ :

$M' = f(M)$; $N' = f(N)$

$\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$

$\overrightarrow{ON} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

Est ce que :

$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$?

$\varphi\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right] = (x_2 - x_1)\vec{i}'$

$+ (y_2 - y_1)\vec{j}' + (z_2 - z_1)\vec{k}'$.

oui

Enfin, φ est un endomorphisme orthogonal puisque qu'une base orthonormée est transformée en une base orthonormée.

Réciproque immédiate

$\mathbb{Z}$

f isométrie $\longmapsto$ * f est affine
φ, endomorphisme ass. est orthogonal

Groupe des isométries, sous-groupe des déplacements

$f : E \longrightarrow E$

$g : E \longrightarrow E$

On appelle déplacement une isométrie f associée à $\varphi \in \mathcal{O}_+(\vec{E})$

g sera dite antidéplacement si et seulement si ψ, associée à g, est tel que $\psi \in \mathcal{O}_-(\vec{E})$.

$\vec{E} = \vec{E}_1$ (dim 1)

$\varphi = Id_{\vec{E}_1}$; $\psi = -Id_{\vec{E}_1}$

$\vec{E} = \vec{E}_2$ (dim 2)

$\varphi = Id_{\vec{E}_2}$ ou φ = une rotation vect.

ψ = symétrie par rapport à une droite.

$\vec{E} = \vec{E}_3$ (dim 3)

φ = une rotation ou $Id_{\vec{E}_3}$

ψ = une réflexion vectorielle ou une transformation orthogonale dont le sous-espace des invariants a pour dim 0. (composées de 3 réflexions vectorielles)

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries de E.

① $(\mathcal{I}, \circ)$ = groupe

* Soit $(f, g) \in \mathcal{I}^2$, $\forall (A, B) \in E^2$:

$d\big((g\circ f)(A),\ (g\circ f)(B)\big) = d\big(f(A),\ f(B)\big) = d(A,B)$

$g\circ f \in \mathcal{I}$.

$\circ$ interne dans $\mathcal{I}$.

* $\circ$ est associative
* $Id_E \in \mathcal{I}$ car $d\big(Id_E(A),\ Id_E(B)\big) = d(A,B)$
* $\forall f \in \mathcal{I}$, f bijective.

$\exists\ f^{-1}$.

De plus : $d\big(f^{-1}(A),\ f^{-1}(B)\big) = d\big(f\circ f^{-1}(A),\ f\circ f^{-1}(B)\big)$

$= d(A,B)$

donc $f^{-1} \in \mathcal{I}$

Donc $(\mathcal{I}, \circ)$ = groupe

② Sous groupe des déplacements.

Les déplacements ont été définis ci-dessus

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des déplacements. Est-ce que $(\mathcal{D}, \circ)$ forme un sous groupe de $(\mathcal{I}, \circ)$?

Il suffit de démontrer que $\mathcal{D} \neq \emptyset$, que $\circ$ est interne dans $\mathcal{D}$, et que, si $f \in \mathcal{D}$, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}$.

* $Id_E \in \mathcal{D}$, puis l'endomorphisme associé à Id_E est $Id_{\vec{E}}$
* $\circ$ interne.

$(f, g) \in \mathcal{D}$

$g\circ f$ a pour endomorphisme associé une rotation vectorielle

(voir composée de 2 rotations vectorielles).

Donc $g \circ f \in \mathcal{D}$.

* f associé à $r \in \mathcal{O}_+(\vec{E})$

  f^{-1} est associé à $r^{-1} \in \mathcal{O}_+(\vec{E})$

Donc

$$(\mathcal{D}, \circ) = \text{groupe}$$

7.5

Isométries du plan P

$f \in \mathcal{I}(P) \mapsto \begin{cases} f \text{ affine} \\ \varphi \text{ ass. est t. orth de } \vec{P}. \end{cases}$

φ = rotation ou symétrie par rapport à $\vec{P}$

$\varphi \in \mathcal{O}(\vec{P}) \quad \begin{cases} \varphi = r \mapsto \varphi \in \mathcal{O}_+^*(\vec{P}) \\ \varphi = \sigma_{\vec{D}} \mapsto \varphi \in \mathcal{O}_-(\vec{P}) \end{cases}$

f est un déplacement de P ou un antidéplacement de P.

Déplacement de (P) = translations et rotations ponctuelles

$\underbrace{\varphi = Id_{\vec{P}}}_{f = t_{\vec{u}}}$ ou $\underbrace{r \neq Id_{\vec{P}}}_{f = \text{déplacement} \neq t_{\vec{u}}}$

* Recherche des points invariants par un déplacement f avec $\varphi \neq Id_{\vec{P}}$:

Soit $f\,(A, A', \varphi)$

M invariant $\longmapsto f(M) = M$

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M}$$
$$= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}$$
$$\varphi(\overrightarrow{AM}) - Id_{\vec{P}}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A}$$
$$(\varphi - Id_{\vec{P}})(\overrightarrow{AM}) = \underbrace{\overrightarrow{A'A}}_{\text{donné}}$$

$$\varphi : \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{et } a^2+b^2=1,\ a \neq 1$$

$$Id_{\vec{P}} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi - Id_{\vec{P}} : \begin{bmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{bmatrix}$$

$$D = (a-1)^2 + b^2 = 2(1-a) \neq 0$$

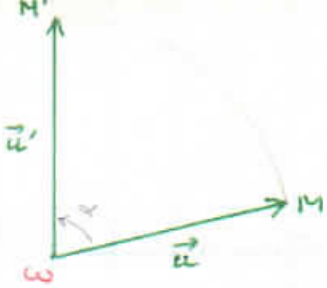
$\varphi - Id$ est bijective. $\exists!\ \overrightarrow{AM} \longmapsto \exists!\ M$

$\exists!\ M$ invariant par f

Définition

On appelle rotation de P une isométrie positive associée à un endomorphisme orthogonal différent de l'identité $Id_{\vec{P}}$. $\exists!\ \omega$ invariant et $r_{(\omega,\alpha)}$ = rotation de centre ω et d'angle α.

Si $x \in \mathbb{R}$, mes $\alpha \equiv x\ [2\pi]$. On peut écrire $r_{(\omega,x)}$.



$$\begin{cases} \vec{u}' = \varphi(\vec{u}) \\ M' = r(M) \end{cases} \qquad \varphi : \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{\varphi(\vec{i})}$$

Antidéplacements du plan :

1% On connait les sym. affines (involutives) orthogonales par rapport à des droites

2% Soit $s_D \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \vec{D}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

$f = s_D \circ t_{\vec{u}}$ est un antidéplacement (où $\sigma_\beta \circ Id_{\vec{P}}$)

* Points invariants par f. Soit M invariant.

$M \longmapsto t_{\vec{u}}(M) = M_1$

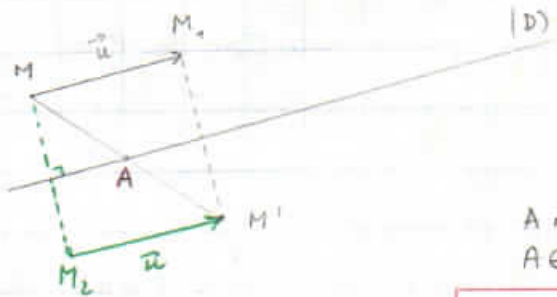
$M_1 \longmapsto s_D(M_1) = M$

$\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$

$\overrightarrow{M_1M}$ orth $\vec{u}$

} incompatible

$\nexists$ M invariant.



A milieu de (M, M')

$A \in (D)$

$$s_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_D$$

9.5 3°/ Soit f un antidéplacement de P, sans point invariant

$f \neq s_D$.

Est-ce que $\underbrace{f}_{\text{donné}} = \underbrace{s_D}_{?} \circ \underbrace{t_{\vec{u}}}_{?}$? avec $\vec{u} \in \vec{D}$

* φ(associée à f) $= \sigma_{\vec{D}} \circ Id_{\vec{P}} = \sigma_{\vec{D}}$ — $\vec{D}$ connu en φ anti sans pts inv

Soit (A, A') un couple tel que $A \in (P)$ et $A' = f(A)$

Soit I le milieu de ce couple.

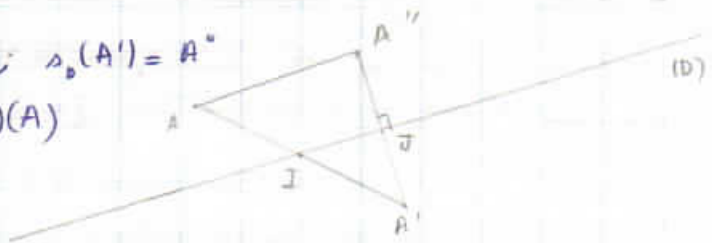
Soit $(D) = (I, \vec{D})$.

$\exists!\ s_D$ = symétrie orth. affine par rapport à (D).

Soit $s_D \circ f$

A ; $f(A) = A'$; $s_D(A') = A''$

$A'' = (s_D \circ f)(A)$



$s_D \circ f$ est une translation (voir $\sigma_{\vec{D}} \circ \sigma_{\vec{B}}$)

De plus $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$

$= 2\overrightarrow{IA'} + 2\overrightarrow{A'J}$

$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{AA''} \in \vec{D}$

$t_{\vec{u}} = s_D \circ f$ $\qquad f = s_D \circ t_{\vec{u}}$ $\qquad \exists (D, \vec{u})$

* Ce couple $(D, \vec{u})$ est-il le seul ?

Sinon, $f = s_D \circ t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ t_{\vec{u}'}$, $\begin{cases} D' \parallel D \\ \vec{u}' \in \vec{D} \end{cases}$.

alors :

$$s_D \circ \underbrace{t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}'}}_{t_{\vec{u}-\vec{u}'}} = s_{D'}$$

$$s_{D'} = s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u}'}$$

Si $\vec{u} - \vec{u}' \neq \vec{0}$, alors $s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u}'}$ n'a pas de point invariant tandis que $s_{D'}$ en a. L'égalité est absurde. Donc $\vec{u} = \vec{u}'$ et

donc $s_D = s_{D'}$ et $D = D'$.

Donc

$\exists ! (D, \vec{u})$ avec $\vec{u} \in \vec{D}$ /

$$f = s_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_D$$

Cette décomposition s'appelle forme réduite de l'antidéplacement f.

Composition de déplacements et antidéplacements

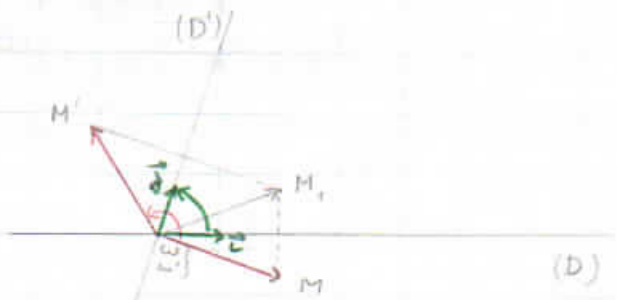
1°) $s_{D'} \circ s_D$?

* Si $D' = D$, $s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_D = Id_P$
* $D' \parallel D \Leftrightarrow \vec{D'} = \vec{D}$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1H'}\right)$$
$$= 2\overrightarrow{HH'} = \text{vecteur fixe}$$

$$s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{u}}, \quad \vec{u} = 2\overrightarrow{HH'}$$

* $\exists! \omega \in D' \cap D$



ω est l'unique point invariant par le déplacement

$s_{D'} \circ s_D$. $s_{D'} \circ s_D$ = rotation de P de centre ω.

$\text{angl}(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \text{angl}(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M_1}) + \text{angl}(\overrightarrow{\omega M_1}, \overrightarrow{\omega M'})$

$= (\alpha + \alpha) + (\beta + \beta) = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)$

avec $\alpha = \text{angl}(\vec{i}, \overrightarrow{\omega M_1})$

$\beta = \text{angl}(\overrightarrow{\omega M_1}, \vec{j})$

$\text{angl}(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \alpha \ [2\pi]$.

Alors $\text{mes}(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \boxed{2\alpha} + k2\pi$

2% Réciproques

* On donne $t_{\vec{u}}$. $\exists$ D et D' $\in$ P / $t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ s_D$

Il suffit que $D \parallel D'$; $\vec{D} = \vec{D}' \perp \vec{u}$

$H \in (D)$, $H' \in (D')$, $\overrightarrow{HH'} = \frac{\vec{u}}{2}$

↑ ordre ! ↑

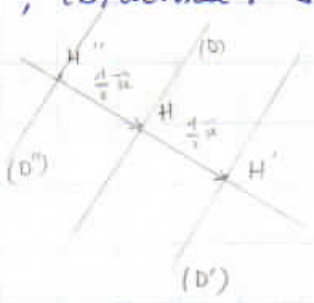
Il suffit de se donner arbitrairement l'une des 2 droites :

$t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ s_D$, (D) donnée $\vdash \exists !\ (D')$

$t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D''}$, (D) donnée $\vdash \exists !\ (D'')$

$\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}\vec{u}$

$\overrightarrow{H''H} = \frac{1}{2}\vec{u}$



* On se donne $r_{(\omega,\alpha)}$, $\omega \in (P)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$r_{(\omega,\alpha)} = s_{D'} \circ s_D$? (ordre ↓)

Oui si $\omega \in (D) \cap (D')$

et si $\text{angl}(D, D') + \text{angl}(D, D')$ est un angle qui peut être inclus dans $\mathcal{A}$ si l'on se souvient que

$\dot{\alpha} = \{\alpha, \alpha + p\}$

et que $\alpha + \alpha = \alpha + p + \alpha + p = \beta \in \mathcal{A}$

Mesures : $\text{mes}(D, D') + \text{mes}(D, D') = \text{mes}(r)$

$= \alpha$

$\text{mes}(D, D') = \frac{\alpha}{2}$, par exemple

Les autres sont $\frac{\alpha}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{mes}(D, D') \equiv \frac{\alpha}{2} \ [\pi] .$$

Rappel : $\text{mes}(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) \equiv \alpha \ [2\pi]$.

Remarque

$$r = s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_{D''}$$

3°/ $r'_{(\omega,\alpha')} \circ r_{(\omega,\alpha)}$

$(\alpha, \alpha') \in \mathcal{D}$ mes $\alpha \equiv \alpha \ [2\pi]$

mes $\alpha' \equiv \alpha' \ [2\pi]$

Soit $D = (\omega\omega')$ ou alors D = droite passant par $\omega = \omega'$ si confondus.

Alors $r_{(\omega,\alpha)} = s_D \circ s_{D'}$ avec $\text{mes}(D', D) \equiv \frac{\alpha}{2} \ [\pi]$

$r'_{(\omega',\alpha')} = s_{D''} \circ s_D$ avec $\text{mes}(D, D'') \equiv \frac{\alpha'}{2} \ [\pi]$

$\omega \in D'$, $\omega' \in D''$

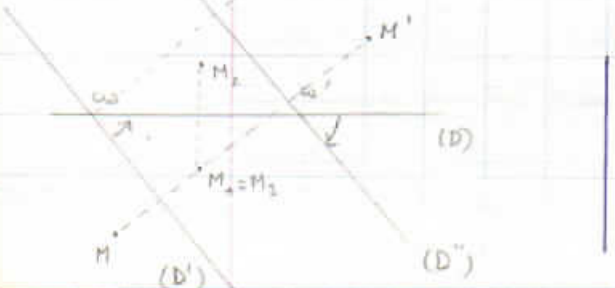
Alors $r' \circ r = s_{D''} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D'}$

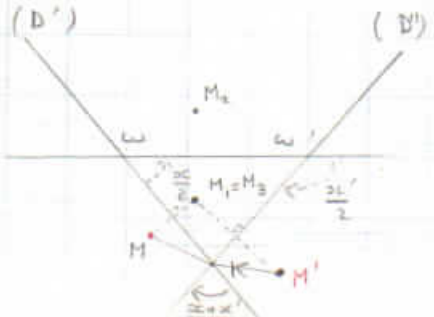
$r' \circ r = s_{D''} \circ s_{D'}$

$t_{\overrightarrow{\omega\Omega}} = s_{D''} \circ s_{D'}$ ($\omega \in \Omega$)

$\alpha + \alpha' \neq 0 \ [2\pi]$

$r_{(K, \alpha+\alpha')} : M \mapsto M'$





La composée de 2 rotations de centres distincts est une ~~tra~~ translation ssi $x + x' \equiv 0 \ [2\pi]$, alors

$$\frac{x}{2} + \frac{x'}{2} \equiv 0 \ [\pi] \text{ et } D' \parallel D''$$

(voir figure)

4°/ $r_{(\omega,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$, $\alpha \neq \omega$ (angle nul)

$$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D'} \\ r_{(\omega,\alpha)} = s_{D''} \circ s_D \end{array}\right\} \exists!\ D = (\omega, \vec{u}^{\perp})$$

$r \circ t = s_{D''} \circ s_{D'}$

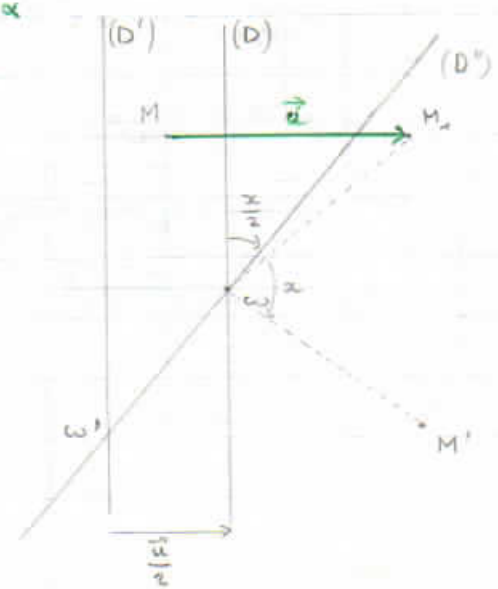
$D' \cap D'' = \{\omega'\}$

$s_{D''} \circ s_{D'} = r'_{(\omega',\alpha)}$ voir endomorphisme φ associé à $r_{(\omega,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$

φ associé à r donné et à r' trouvé

même angle α

$\vec{u}$



$D = (\omega, \vec{u}^{\perp})$

mes $\alpha \equiv x \ [2\pi]$

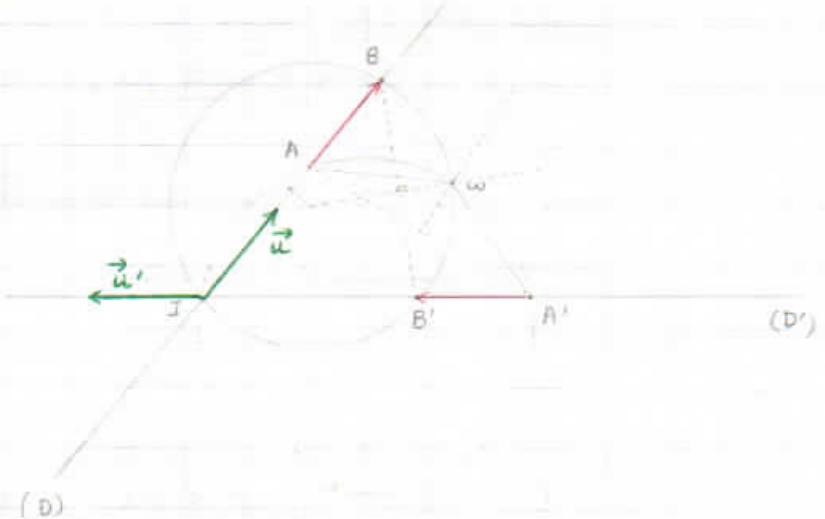
mes angl $(\omega' M, \omega' M') \equiv x \ [2\pi]$

$r \circ t = r'_{(\omega',\alpha)}$

Construction pratique du centre d'une rotation déterminée par 2 points et leurs images.

A ; $A' = r(A)$

B ; $B' = r(B)$ sont donnés.



ω est à l'intersection des cercles (IAA') et (IBB')

des médiatrices de [AA'] et de [BB']

ω cherché est tel que $\text{mes}(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) \equiv \alpha \ [2\pi]$

$\text{mes}(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega B'}) \equiv \alpha \ [2\pi]$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$

$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha \ [2\pi]$

Le dessin montre que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'})$ n'est pas l'angle de la rotation : $\text{mes}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) \equiv \alpha + \pi \ [2\pi]$

$$\text{mes}(IA, IA') \equiv \text{mes}(AB, A'B') \quad [\pi]$$
$$\equiv \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \quad [\pi]$$

Les 4 points (A, A', I, ω) = quadruplet de points cocyclique

Dans ce cas l'angle de la rotation n'est pas nul, mais il peut être mesuré par π. Dans ce dernier cas, le cercle ci-dessus n'existe pas, (c'est la symétrie centrale facile)

Le 2e cercle (IBB') passerait dans le cas général par ω d'où 4 lignes passant par ω

10.5

Isométries de E_3 = Déplacements de E_3

1°/ φ associé à f est l'$Id_{\vec{E}_3}$, alors f est une translation de E_3.

2°/ $\varphi \neq Id_{\vec{E}_3}$; $\varphi \in O_+(\vec{E}_3)$

φ = rotation vectorielle d'axe $\vec{\Delta}$

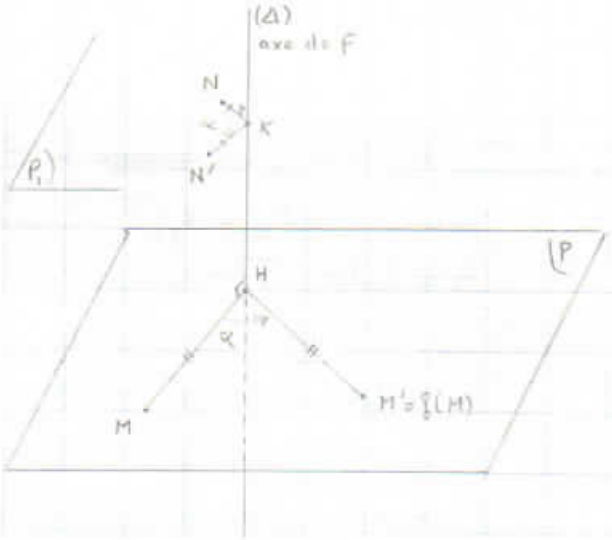
α) Si $\exists$ 1 pt invariant par f, alors

$\exists$ infinité : voir ss espace affine associé au ss. esp. vect. des inv. par φ.

$\exists\ \Delta$, droite des points invariants.

f = rotation de E_3, d'axe Δ, et d'angle α, celui (def)

de $\mathcal{P}$.



Rappel

Pour pouvoir parler d'angle α, il faut avoir orienté $\mathcal{X}$ un des plans P ci-dessus, c'est-à-dire avoir orienté $\vec{P} = \vec{\Delta}^{\perp}$

3) Si $\exists$ pt inv. par f, alors on dit que f est un vissage ou déplacement hélicoïdal de E_3.

Propriété fondamentale d'un vissage

① $t_{\vec{u}} \circ r_{(\Delta,\alpha)}$, avec $\vec{u} \in \vec{\Delta}$, $\alpha \neq 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Alors on montre que $t_{\vec{u}} \circ r_{(\Delta,\alpha)}$ = vissage

En effet, l'endomorphisme associé est la rotation vectorielle d'angle α.

$\exists$ pt invariant : $M \xmapsto{r} M_1 \xmapsto{t} M$

car on aurait $\overrightarrow{MM_1} \perp \vec{u}$ et $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$, contradiction.

14.5

② Soit f un vissage de E_3. Est-il possible d'écrire $f = t_{\vec{u}} \circ r_{(\Delta,\alpha)}$? avec $\vec{u} \in \vec{\Delta}$

$A' = f(A)$ (f = vissage)

$t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f(A) = t_{\overrightarrow{A'A}}(A') = A$

A = 1 pt invariant par $t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f = r_{(\Delta_1,\alpha)}$

$\Delta_1 = (A, \vec{\Delta})$

$\begin{cases} \overrightarrow{A'A} \text{ n'est pas colinéaire à } \vec{u}. \\ \overrightarrow{A'A} \notin \vec{\Delta} \end{cases}$

$\overrightarrow{A'A} = -\vec{v} - \vec{u}$ (poser $\overrightarrow{AA'} = \vec{v} + \vec{u}$)

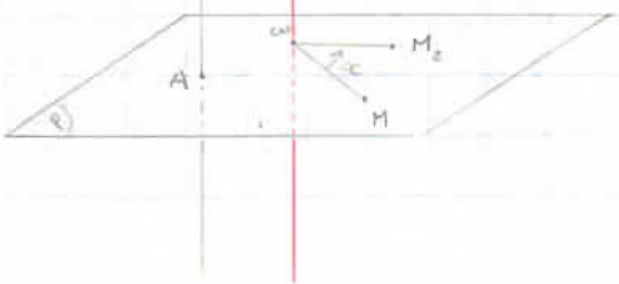
et $\vec{u} \in \vec{\Delta}$ et $\vec{v} \perp \vec{\Delta}$.

$t_{\overrightarrow{A'A}} = t_{-\vec{v}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{-\vec{v}}$

$t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f = t_{-\vec{v}} \circ t_{-\vec{u}} \circ f = r_{(\Delta_1,\alpha)}$

$t_{-\vec{u}} \circ f = t_{\vec{v}} \circ r_{(\Delta_1,\alpha)}$

(Δ_1) (Δ) ?



La restriction de $r_{(O,\alpha)}$ à $P = (A, \vec{\Delta}^{\perp})$, est la rotation autour de A, d'angle α.

$t_{\vec{v}}$ peut être considérée comme une translation de $\vec{P}$

$t_{\vec{v}} \circ r_{(A,\alpha)} = r_{(\omega,\alpha)}$ (où déplacements de P)

ω invariant par $r_{(\omega,\alpha)}$ est invariant par $r_{(O,\alpha)}$;

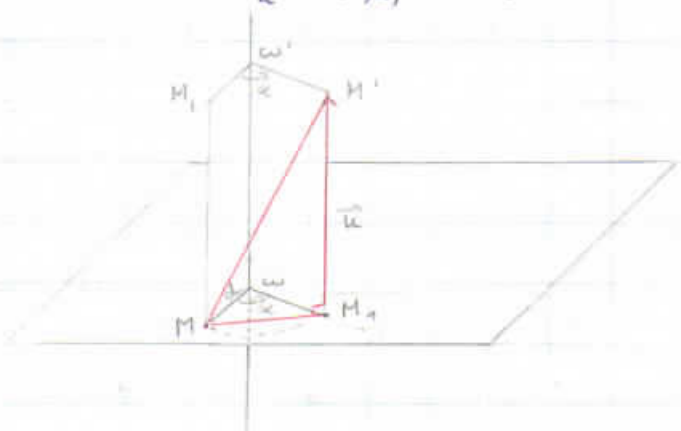
$\Delta = (\omega, \vec{\Delta})$

(La raison en est que $\vec{v} \in \vec{P}$)

$t_{-\vec{u}} \circ g = r_{(O,\alpha)}$

$$g = t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\alpha)} \quad , \quad \vec{u} \in \vec{\Delta}$$

Remarque $t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\alpha)} = r_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$



$MM'^2 = M_1M^2 + \|\vec{u}\|^2$ $\quad d(M,M')$ minimale $= \|\vec{u}\|$

14.5 14 Similitudes

Définition

$s : E \longrightarrow E$

$M \longmapsto M' = s(M)$

$P \longmapsto P'$

$d(M',P') = k \cdot d(M,P) \qquad k \neq 0 \qquad (k>0)$

Ex : homothétie $h : E_3 \longrightarrow E_3$

$M \longmapsto M'$

Soit $h_{(\Omega,-3)}$: $\overrightarrow{M'P'} = -3\overrightarrow{MP}$

$d(M',P') = 3\, d(M,P)$ car $3 = |-3|$

Dans la suite, on étudiera les similitudes de P

Décomposition, ~~Jamais~~ $h \circ f = s$

s donnée, de rapport $k > 0$

h hom. donnée de même rapport k.

$\exists f \;/\; s = h \circ f \qquad f \neq 0$

En effet $\exists h^{-1} \;/\; h^{-1} \circ h = Id$

$h^{-1} \circ s = f$

h^{-1} a même centre ω (quelconque ci-dessus) et pour rapport $\frac{1}{k}$.

$$d\left[s(M), s(P)\right] = k\, d(M,P)$$
$$d\left[h^{-1}\circ s(M),\ h^{-1}\circ s(M)\right] = \frac{1}{k}\, k\, d(M,P) = d(M,P)$$
$$\forall (M,P) \in \mathcal{P}^2$$

$h^{-1}\circ s$ = isométrie f de $\mathcal{P}$.

f = déplacement de $\mathcal{P}$ $\longmapsto$ s = similitude directe

f = antidéplacement de $\mathcal{P}$ $\longmapsto$ s = sim. indirecte (ou "inverse")

s est une bijection affine.

$s = h \circ f$

h bject. aff. ; f a.

$(S, \circ)$ groupe isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

C'est un isomorphisme de groupe (voir livre).

Points invariants

$k \neq 1$, alors s possède un pt invariant et un seul

Soit $s = (A, A', k\mathcal{T})$, $\mathcal{T}$ = transformation orthogonale.

Posons $\psi = k\varphi$

$\psi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$, $\forall M \in P$, $M' = s(M)$

M invariant $\mapsto$ $\psi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}$ $\qquad Id = Id_{\vec{P}}$

$(\psi - Id)(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A}$

Noyau $(\psi - Id) = \{\vec{0}\}$?

$(\psi - Id)(\vec{u}) = \vec{0}$ dès que $\vec{u} \in N(\psi - Id)$

$\psi(\vec{u}) = Id(\vec{u}) = \vec{u}$

$k.\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$

$k \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$

$(k-1)\|\vec{u}\| = 0$

$k \neq 1 \mapsto \|\vec{u}\| = 0 \mapsto \vec{u} = \vec{0}$

$\psi - Id$ = bijection

$\overrightarrow{A'A}$ donné, $\exists!\ \overrightarrow{AM}$ / $(\psi - Id)(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A}$

$\exists!\ M \in P$

Pratique

$M'(x', y') = s(M)$

$M(x, y)$ $\qquad (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé)

$$M(\psi, \vec{i}, \vec{j}) = k\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad k\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{O'M'}\ (X', Y')$

$\overrightarrow{OM}\ \ (X, Y)$

$\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \qquad O' = s(O)$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = ka\,x - kb\,y + x_0 \\ y' = kb\,x + ka\,y + y_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = ka\,x + kb\,y + x_0 \\ y' = kb\,x - ka\,y + y_0 \end{cases}$$

et $a^2 + b^2 = 1$ et $a^2 + b^2 = 1$

$ka = a'$

$kb = b'$

$a'^2 + b'^2 = k^2$

$$M = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$$

ou

$$M = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{bmatrix}$$

avec $\boxed{k = \sqrt{a'^2 + b'^2}}$

16.5

Décomposition remarquable utilisant le pt ω invariant (si $k \neq 1$)

Soit $h_{(\omega,k)}$.

On sait que $s = h \circ g$ avec g isométrie.

① s directe $\mapsto$ g déplacement

($g \neq$ translation, voir points invariants)

g = rotation

Soit r la rotation de centre ω, et d'angle connu (celui de s g, celui de φ).

Faisons $h \circ r$, et montrons que $h \circ r = s$.

* endomorphismes associés égaux $= k\varphi$

* $\omega \xrightarrow{s} s(\omega) = \omega \xrightarrow{g}$

$\omega \xrightarrow{h \circ r} h \circ r(\omega) = h(\omega) = \omega$

oui : $s = h \circ r$

$$s = h_{(\omega,k)} \circ r_{(\omega,\alpha)}$$

angle de $\vec{r}/\vec{r'} = \alpha$

Remarque :

$s = r_{(\omega,\alpha)} \circ h_{(\omega,k)}$ oui (même démonstration)

Il y a commutativité.

Le point ω, centre commun de h et r précédemment introduites, est dit centre de la similitude.

On écrit :

$$s_{(\omega, k, \alpha)}$$

② s indirecte $\longmapsto$ $s = h \circ f$ avec f anti déplacement.

$h_{(\omega, k)}$.

On introduit la symétrie orth. affine par rapport à la droite D passant par ω et de direction connue (ensemble des vecteurs invariants par φ, soit $\vec{D}$)

On fait $h \circ s_D$, et on va montrer que $h \circ s_D = s$

* endomorphismes associés $= k\varphi$ (φ = symétrie vect. de $\vec{P}$)

* $\omega \xrightarrow{s} s(\omega) = \omega$ ←

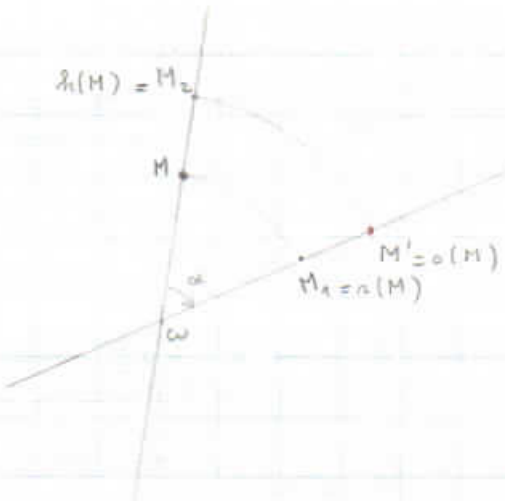
  $\omega \xrightarrow{h \circ s_D} h \circ s_D(\omega) = h(\omega) = \omega$ car $\omega \in (D)$

ouï : $s = h \circ s_D = s_D \circ h$

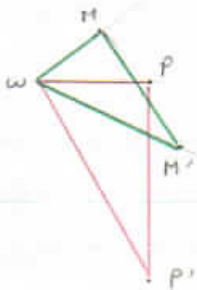
$$\boxed{s = h_{(\omega, k)} \circ s_D}$$

et commutativité

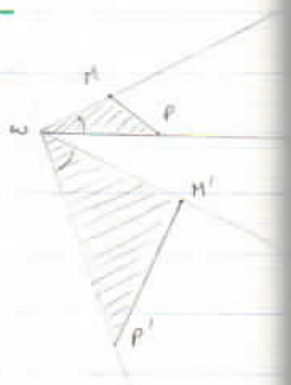
$\omega \in (D)$



$\omega M M'$
$\omega P P'$ } même



similitude directe $s = h_{(\omega, k)} \circ r_{(\omega, \alpha)}$



similitude indirecte $s = h_{(\omega, k)} \circ s_D$; $\omega \in (D)$

(D)

Remarque

(D) et (D') sont globalement invariantes par la similitude indirecte. On dit que (D) est la première.

$s = h_{(\omega,k)} \circ s_D = s_D \circ h_{(\omega,k)}$

$s = h'_{(\omega,-k)} \circ s_{D'} = s_{D'} \circ h'_{(\omega,-k)}$

17.5

Interprétation d'une similitude à l'aide des nombres complexes.

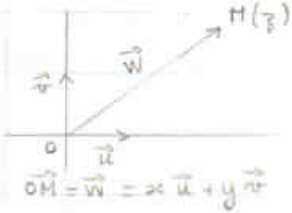
① Similitudes directes

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

$z = x + yi$

$z' = x' + y'i$

M d'affixe z et M' d'affixe z'



$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{f} & z' \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ M & \xrightarrow{F} & M' \end{array}$$

$z' = f(z)$?

$z' = x' + y'i$

$= (a + bi)x + (-b + ai)y + (c + c'i)$

$= (a + bi)x + i(a + bi)y + (c + c'i)$

$$z' = \underbrace{(a+bi)}(x+yi) + c + c'i$$

$$z' = A z + B$$

$$\boxed{z' = A z + B \quad ; \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2} \quad (A \neq 0)$$

② Similitude indirecte

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x' + y'i = z' &= (a+bi)x + (b-ai)y + c + c'i \\ &= (a+bi)x + i\left(\frac{b}{i} - a\right)y + c + c'i \\ &= (a+bi)x + i(-bi-a)y + c + c'i \\ &= (a+bi)(x - yi) + c + c'i \end{aligned}$$

$$z' = A\bar{z} + B$$

$$\boxed{z' = A\bar{z} + B \quad ; \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2} \quad (A \neq 0)$$

Inversement, soit la relation $z' = Az + B$

$(A,B) \in \mathbb{C}$

$$x' + y'i = (a+bi)(x+yi) + c + c'i$$

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \longmapsto \text{similitude directe ssi } A \neq 0$$

Soit $z' = A\bar{z} + B$

$x' + y'i = (a + bi)(x - yi) + c + c'i$

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \longmapsto \text{sim. indirecte ssi } A \neq 0$$

Résumé

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = az + b \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \longmapsto \{ F = \text{sim. dir. de } P \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = a\bar{z} + b \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \longmapsto \{ F = \text{sim.indir. de } P \}$$

Traduction des propriétés de F relativement à A et B

$z' = Az + B$

1°/ Si $k = 1$ $\longmapsto \sqrt{a^2 + b^2} = 1$

$\longmapsto |A| = 1$ car $A = a + bi$

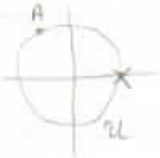
F = déplacement.

* $A = 1$ et $B = 0$, $z' = z$, $F = Id_P$
* $A = 1$, $\forall B \in \mathbb{C}^*$, $z' - z = B$

$z' - z$ = affixe de $\overrightarrow{MM'}$

B = affixe de $\vec{w}$ fixe

$\overrightarrow{MM'} = \vec{w} \longmapsto T = t_{\vec{w}}$



* Si $A \neq 1$, $(|A| = 1)$

F = rotation

centre ω : $z' = z$ donc $z = Az + B$

$z(1 - A) = B$

$\exists ! \; z = \dfrac{B}{1 - A} = z_\omega$

angle ? $a = \cos\alpha = \cos\theta$

$b = \sin\alpha = \sin\theta$

$a^2 + b^2 = 1$

~~Forme~~ $A = a + bi = \cos\theta + i\sin\theta$

$\arg A \equiv \theta \; [2\pi]$

α est mesuré par $\arg A$, une des déterminations de $\mathrm{Arg}\, A$.

2°/ Si $k \neq 1$.

$a^2 + b^2 \neq 1$

$|A| \neq 1$

$F \neq$ déplacement

$F = h_{(\omega, k)} \circ r_{(\omega, \alpha)}$

ω : $z = Az + B$

$z_\omega = \dfrac{B}{1-A}$ $\quad (A \neq 1$ car $|A| \neq 1)$

h : $k = |A|$

α : $z' = Az + B$

$\underline{z_\omega = A z_\omega + B}$

$(z' - z_\omega) = A(z - z_\omega)$

Soit $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ le nouveau repère $\quad M(z), (Z)$.
$M(z'), (Z')$.

Z = affixe de $\overrightarrow{\omega M} = z - z_\omega$

Z' = " de $\overrightarrow{\omega M'} = z' - z_\omega$

$$\boxed{Z' = AZ}$$

$|Z'| = |A| \cdot |Z|$

$\| \overrightarrow{\omega' M} \| = |A| \cdot \| \overrightarrow{\omega M} \|$

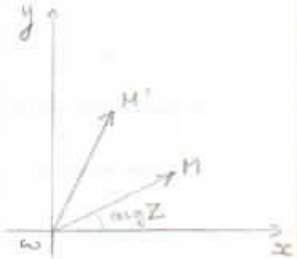
$\arg Z' \equiv \arg A + \arg Z \quad [2\pi]$

$\arg Z' - \arg Z \equiv \arg A$

$\text{mes} \left(\overrightarrow{\omega x}, \overrightarrow{\omega M'} \right) - \text{mes} \left(\overrightarrow{\omega x}, \overrightarrow{\omega M} \right) \equiv \arg A$

$\text{mes} \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'} \right) \equiv \arg A$

$\text{mes}\, \alpha \equiv \arg A \quad [2\pi] \qquad \alpha \in \mathbb{R}$



F = similitude directe
ω invariant
$k = |A|$
mes $\alpha \equiv \arg A \quad [2\pi]$

$z' = A\bar{z} + B$

1°/ $k = 1$, $|A| = 1$

F = antidéplacement

Points invariants ?

$$z = A\bar{z} + B \qquad (1)$$

$$\bar{z} = \overline{A\bar{z} + B} = \bar{A} \cdot z + \bar{B} \qquad (2)$$

$$z = A(\bar{A} \cdot z + \bar{B}) + B$$

$$z = A\bar{A}z + (A\bar{B} + B)$$

$$(1 - A\bar{A})z = A\bar{B} + B$$

Or $A\bar{A} = 1 \ (= |A|^2)$ donc $0z = A\bar{B} + B$

* Si $A\bar{B} + B \neq 0$, ∄ pt invariant

$F = s_D \circ t_{\vec{w}}$, $\vec{w} \in D$

* Si $A\bar{B} + B = 0$, on sait que $F = s_D$ ($D =$ ens.

des points invariants).

2° $k \neq 1$, $|A| \neq 1$

$F = s_D \circ h_{(\omega, k)} = h \circ s_0$

$\underline{\omega}$: $z_\omega = A\bar{z}_\omega + B$

$(\underbrace{1 - A\bar{A}}_{\neq 0}) z_\omega = A\bar{B} + B$

$\exists ! \omega$

$\underline{k}$: $k = |A|$

$\underline{D}$: $M \in D \vdash M' \in D$

$\overrightarrow{\omega M}$ et $\overrightarrow{\omega M'} \in \vec{D}$

$\overrightarrow{\omega M'} = |A| \overrightarrow{\omega M}$ car $|A| = k$

$z' = |A| z$ (1)

et $z' = z' - z_\omega$

$z = z - z_\omega$

et $z' = A\bar{z} + B$

$z'_\omega = A\bar{z}_\omega + B$

$(z' - z_\omega) = A(\bar{z} - \bar{z}_\omega) \vdash z' = A\bar{z}$ (2)

D'où le système

$\begin{cases} z' = A\bar{z} & (1) \\ z' = |A| z & (2) \end{cases}$ pour $(M, M') \in D^2$

$A\bar{z} = |A| z \qquad |A| \neq 0$

$\frac{A}{|A|}\bar{z} = z$

$\arg \frac{A}{|A|} + \arg \bar{z} \equiv \arg z \quad [2\pi]$

$\arg A - \arg z \equiv \arg z$

$2 \arg z \equiv \arg A \quad [2\pi]$

$\arg \underset{\sim}{z} \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$

↓

z relatifs & $+$ aux $M \in D(\omega, \vec{D})$

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la droite D :

$\text{mes}(\vec{u}, \vec{u}) \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$

$\text{mes}(x'x, D) \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$

F = similitude indirecte

ω invariant

$k = |A|$

$\omega \in D$ et $\text{mes}(x'x, D) \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$

Exemples

1. $z' = iz$

$A = i$, $B = 0$

$|A| = 1$; $i \neq 1$

F = rotation (ω, α)

ω : $z = iz$

$(1-i)z = 0 \vdash z = 0$

$\omega = 0$

α ? mes $\alpha \equiv \arg A \ [2\pi]$

$A = 0 + 1i$

$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\arg A \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

2. $z' = iz + 2 - i$

rotation d'angle mesuré par $+\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

ω ? $(1-i)z_\omega = 2 - i$

$z_\omega = \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i^2)} = \frac{1}{2}(3+i)$

$z_\omega = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \qquad \omega\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3. $z' = -iz + 3i$

$r(\omega, -\frac{\pi}{2})$ $\qquad z_\omega = \frac{3i}{1+i} = \frac{3i - 3i^2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

$\omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

4. $z' = z + 2$

$z' - z = 2$ translation de vecteur $\vec{w}(2, 0$

21.5 15

Coniques

Ce sont les courbes d'équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

$M(x, y)$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

On se placera dans le cas où $|a| + |b| \neq 0 \mapsto (a, b) \neq (0, 0)$

Supposons $ab = 0 \mapsto a = 0$ ou $b = 0$

Par exemple $a = 0$

$$by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

1) $c \neq 0$ $\quad x = \dfrac{-by^2 - 2dy - e}{2c}$

$$x = -\frac{b}{2c}y^2 - \frac{d}{c}y - \frac{e}{2c}$$

$$x = \underbrace{\alpha}_{\neq 0} y^2 + \beta y + \gamma$$

$$x = \alpha\left(y^2 + \frac{\beta}{\alpha}y + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$x = \alpha\left(\left(y + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$x = \alpha\left(y + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{\Delta}{4\alpha}\right)}_{X} = \alpha \underbrace{\left(y + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}_{Y}$$

nouveau repère $\left\{\omega\left(-\frac{\Delta}{4\alpha}, -\frac{\beta}{2\alpha}\right) ; \vec{i}, \vec{j}\right\}$

$$\boxed{X = \alpha Y^2}$$

$\omega \in (P)$, parabole représentative

$(\omega, \vec{i})$ = axe de symétrie de (P)

ω = sommet

Concavité tournée vers la droite ssi $\alpha > 0$.

2) $c = 0$

$$\delta y^2 + 2dy + e = 0 \quad , \delta \neq 0.$$

$$\delta\left(y^2 + \frac{2d}{\delta} y + \frac{e}{\delta}\right) = 0$$

$$y^2 + 2\alpha' y + \beta' = 0$$

$$(y + \alpha')^2 - \alpha'^2 + \beta' = 0$$

$$(y + \alpha')^2 - \underbrace{(\alpha'^2 - \beta')}_{u} = 0$$

* $u < 0$, $(y + \alpha')^2 = u < 0$

Impossible

$\nexists\, y.\quad (\mathcal{C}) = \emptyset$

$* \; u = 0$, donc $y = -\alpha'$ (double) , $\forall x \in \mathbb{R}$

(car $c = 0 \vdash 2cx = 0$)

$(\mathcal{C})$ = droite ("double")

$* \; u > 0$, alors $u = m^2$, $(y+\alpha')^2 = m^2$

$y + \alpha' = \pm m$

$y = \pm m - \alpha'$

$(\mathcal{C}) = D_1 \cup D_2$, $D_1 /\!/ D_2$

$D_1 : \quad y = +m - \alpha'$

$D_2 : \quad y = -m - \alpha'$

D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à la droite (Δ): $y = -\alpha'$.

On traiterait pareillement le cas $b = 0$, $(a \neq 0)$.

Supposons $a\,b \neq 0$

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \qquad (ab \neq 0)$$

$$ax^2 + 2cx + by^2 + 2dy + e = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{2c}{a}x\right) + b\left(y^2 + \frac{2d}{b}y\right) + e = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{c}{a}\right)^2 - \frac{c^2}{a^2}\right] + b\left[\left(y + \frac{d}{b}\right)^2 - \frac{d^2}{b^2}\right] + e = 0$$

$$a\left(x+\frac{c}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{d}{b}\right)^2-\frac{c^2}{a}-\frac{d^2}{b}+e=0$$

$\left\{\omega\left(-\frac{c}{a},-\frac{d}{b}\right);\vec{i};\vec{j}\right\}$ repère nouveau

$$aX^2+bY^2+k=0$$

Il est clair que:

1°) ω est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

2°) $(\omega,\vec{i})$ et $(\omega,\vec{j})$ sont 2 axes de symétrie.

Revenons à : $aX^2+bY^2+k=0$

① $\underline{ab>0}$, par exemple $a>0$ et $b>0$

* $k=0$, $aX^2+bY^2=0$

$(\mathcal{C})=\{\omega\}$

* $k>0$ $\underbrace{aX^2+bY^2}_{\geqslant 0}=\underbrace{-k}_{<0}$

$(\mathcal{C})=\emptyset$

* $k<0$

$k=-m^2$, $m\neq 0$

$aX^2+bY^2-m^2=0$

$\frac{a}{m^2}X^2+\frac{b}{m^2}Y^2-1=0$

$$\frac{X^2}{\underbrace{\frac{m^2}{a}}_{>0}} + \frac{Y^2}{\underbrace{\frac{m^2}{b}}_{>0}} - 1 = 0$$

$\frac{m^2}{a} = A^2$ $\qquad$ $\frac{m^2}{b} = B^2$

$$\boxed{\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1}$$

$(\mathcal{E})$ = ellipse

A = longueur d'un demi-axe (grand ou petit)

B = longueur de l'autre demi-axe (petit ou grand)

Si $A = B$, $(\mathcal{E})$ = cercle (C).

- ② $ab < 0$.

$a > 0$ et $b < 0$ par exemple.

$m^2 X^2 - p^2 Y^2 + k = 0$

* $k = 0$

$m^2 X^2 - p^2 Y^2 = 0$

$(mX + pY)(mX - pY) = 0$

$mX + pY = 0$ (D_1)

$mX - pY = 0$ (D_2)

$(\mathcal{E}) = (D_1) \cup (D_2)$. $\quad \{\omega\} = (D_1) \cap (D_2)$

D_1 et D_2 symétriques par rapport à $(\omega, \vec{i})$ ou $(\omega, \vec{j})$

* $k \neq 0$

$$\frac{m^2}{k} X^2 - \frac{p^2}{k} Y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{\frac{k}{m^2}} - \frac{Y^2}{\frac{k}{p^2}} + 1 = 0$$

Si $k > 0$, $\frac{k}{m^2} = A^2$ $\quad \frac{k}{p^2} = B^2$

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} + 1 = 0$$

Si $k < 0$, $k = -k'$

$$\frac{X^2}{\frac{-k'}{m^2}} - \frac{Y^2}{\frac{-k'}{p^2}} + 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{\frac{k'}{m^2}} - \frac{Y^2}{\frac{k'}{p^2}} - 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} - 1 = 0$$

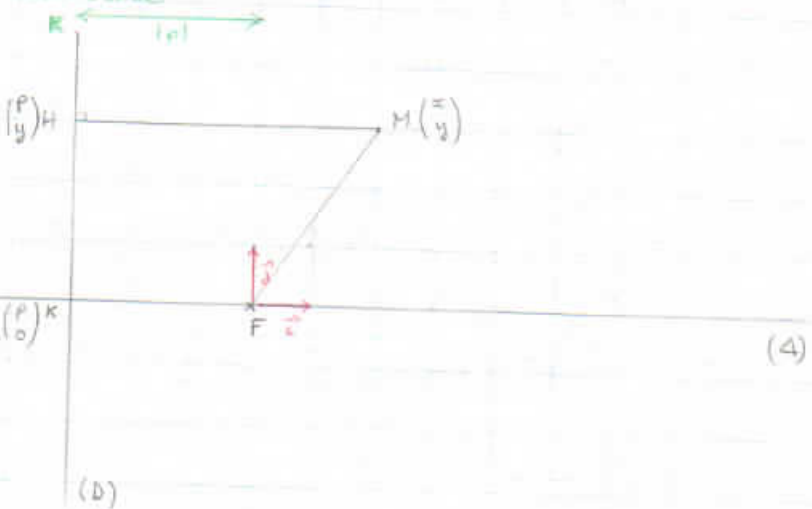
$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = \pm 1$$

$(\mathcal{C})$ = hyperbole

23.5

Foyers et directrices.

Problème



On prend le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\vec{i} \perp (D)$. $F \notin (D)$

Ensemble des points $M \in (P) / \frac{MF}{MH} = e$, $e \in \mathbb{R}_+$, (e donné). (1)

$MF = \sqrt{x^2 + y^2}$

$MH = |\overline{MH}| = |p - x|$

$\sqrt{x^2 + y^2} = e\,|p - x|$

$$x^2 + y^2 = e^2 (p - x)^2 \qquad (2)$$
$$x^2 (1 - e^2) + y^2 + 2pe^2 x - e^2 p^2 = 0$$

On écarte le cas où $e = 0$, $(E) = \{F\}$

De même, $p = 0$, alors $F = K$: $e \lessgtr 1$, $\exists M$

$e = 1$, droite

$e > 1$, $D_1 \cup D_2$ droites concourantes

Ces cas écartés :

① $1 - e^2 = 0 \Leftrightarrow e = 1$

$y^2 + 2px - p^2 = 0$

$y^2 + 2p\left(x - \frac{p^2}{2p}\right) = 0 \qquad p \neq 0$

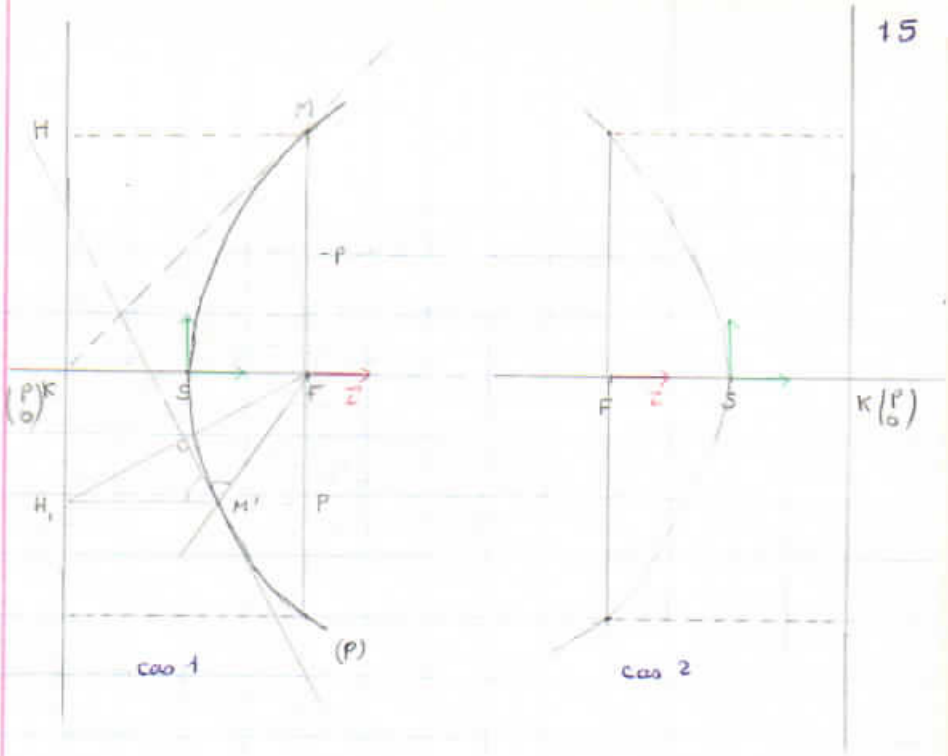
$y^2 + 2pX = 0$

Soit $\begin{cases} X = x - \frac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}$

$S\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ S = milieu de FK

S = nouvelle origine : $Y^2 = -2pX$

$\begin{cases} \text{Si } p < 0 \; ; \; X \geqslant 0 \\ \text{Si } p > 0 \; ; \; X \leqslant 0 \end{cases}$



$Y^2 = -2pX$

$2YY' = -2p$

~~$Y = 0$~~, $\nexists\, Y'$ mais $Y \to 0 \vdash Y' \not\to \pm\infty$

tgte verticale

ou encore $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{+\sqrt{-2pX}}{X}$, par exc (cas 1)

$= \sqrt{\dfrac{-2p}{X}}$ (car $X > 0$)

et $\lim\limits_{X \to 0_+} \dfrac{Y}{X} = +\infty$, tgte verticale

② $e \neq 1 \vdash 1 - e^2 \neq 0$

L'équation générale de est :

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2px - e^2p^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left[x^2 + \frac{2e^2p}{1-e^2}x\right] + y^2 - e^2p^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left[x + \frac{e^2p}{1-e^2}\right]^2 - (1-e^2)\left(\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 - e^2p^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left(x + \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 + y^2 \underbrace{- e^2p^2 - \frac{e^4p^2}{1-e^2}} = 0$$

$$(1-e^2)\underbrace{\left(x + \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2}_{X} + \underbrace{y^2}_{Y} + \frac{-e^2p^2}{1-e^2} = 0$$

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{e^2p}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases}$$

$\omega\left(\dfrac{e^2p}{e^2-1}, 0\right)$ dans $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$

La nouvelle équation est donc :

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 - \frac{e^2p^2}{1-e^2} = 0 \qquad (E)$$

si $1-e^2 > 0$ ⇔ $e < 1$

$$(E) : \quad \frac{X^2}{\underbrace{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}_{>0}} + \frac{Y^2}{\underbrace{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}_{>0}} = 1$$

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 = \dfrac{e^2 p^2}{1-e^2} \end{cases}$$

$$(E) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ellipse de centre ω, d'axes de symétrie (ωX) et (ωY)

β) $1 - e^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1$

$$(E) : \frac{X^2}{\underbrace{\frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2}}_{>0}} - \frac{Y^2}{\underbrace{\frac{e^2 p^2}{e^2-1}}_{>0}} = 1$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

hyperbole de centre ω, d'axes de symétrie (ωX) et (ωY)
Le pt F, foyer de l'hyperbole appartient à l'axe transverse, ici (ωX). La directrice (D) est parallèle à l'axe non transverse.

Problème inverse

① On se donne une parabole. Trouver son foyer et sa directrice.

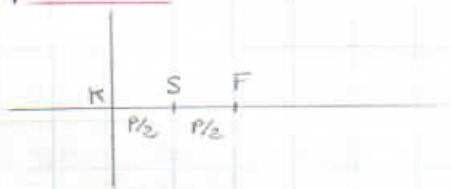
(P) : $y^2 + 2px = 0$ (sommet = origine du repère

$y^2 = -2px$ ← terme sans carré

↑ terme au carré $|p|$ = paramètre de la parabole

$|p| = FK$

$\frac{|p|}{2} = FS = SK$



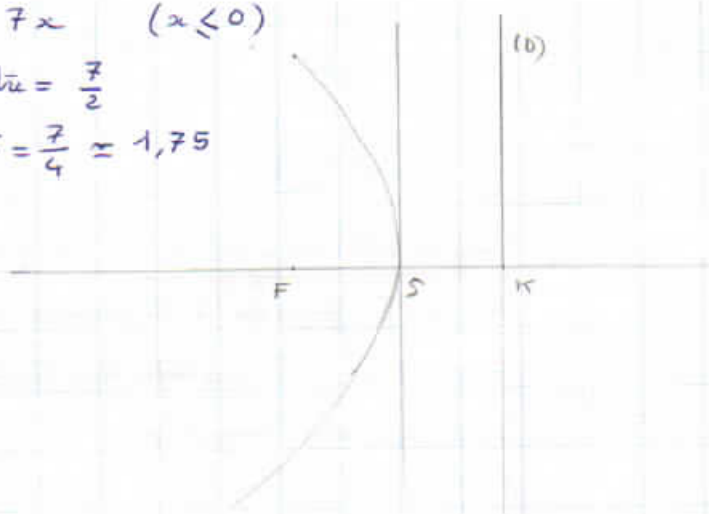
exemple

$y^2 + 7x = 0$

$y^2 = -7x \quad (x \leq 0)$

paramètre = $\frac{7}{2}$

$SF = SK = \frac{7}{4} = 1{,}75$



2.

$y = 2x^2 - x + 5$

$y = 2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + 5 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 5 - \frac{2}{16}$

$y = 2X^2 + \frac{39}{8}$

$2X^2 = \underbrace{y - \frac{39}{8}}_{Y}$

$X^2 = \frac{1}{2} Y$

paramètre $= \frac{1}{4}$

$SF = SK = \frac{1}{8}$

② On se donne une ellipse. Trouver son foyer et sa directrice

$(E) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Il faut, si F et (D) existent, que

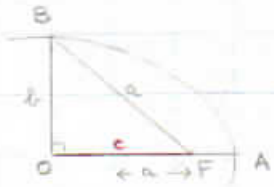
$a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \frac{e^2 p^2}{1-e^2}$

$\frac{b^2}{a^2} = (1-e^2) \quad \vdash \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$\frac{b^2}{a^2}$ connus

$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

Le calcul ne peut se poursuivre que si $a^2 > b^2$. On pose traditionnellement $a^2 - b^2 = c^2$



$a^2 = b^2 + c^2$

Z

$$\boxed{e = \frac{c}{a}} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

voir p 337

e = excentricité de (E)

Alors

$$\frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = b^2$$

$$p^2 = b^2 \frac{(1 - e^2)}{e^2}$$

$$p^2 = b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{c^2} \right)$$

$$p^2 = b^2 \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^4}{c^2}$$

$$p = \pm \frac{b^2}{c}$$

or, ω, centre de l'ellipse, doit avoir pour abscisse

dans $(F, \vec{i}, \vec{j})$ $\begin{cases} \frac{-e^2 p}{1-e^2} & \text{(voir position ci-dessus)} \end{cases}$

donc F aura dans $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$ pour abscisse $\frac{e^2 p}{1-e^2}$

$$\frac{e^2 p}{1-e^2}\left(\pm \frac{b^2}{c}\right) = \mp c$$

$\exists$ F et F' / $\overline{\omega F} = +c$ et $\overline{\omega F'} = -c$

alors $\overline{FK} = p_1 = \frac{b^2}{c}$

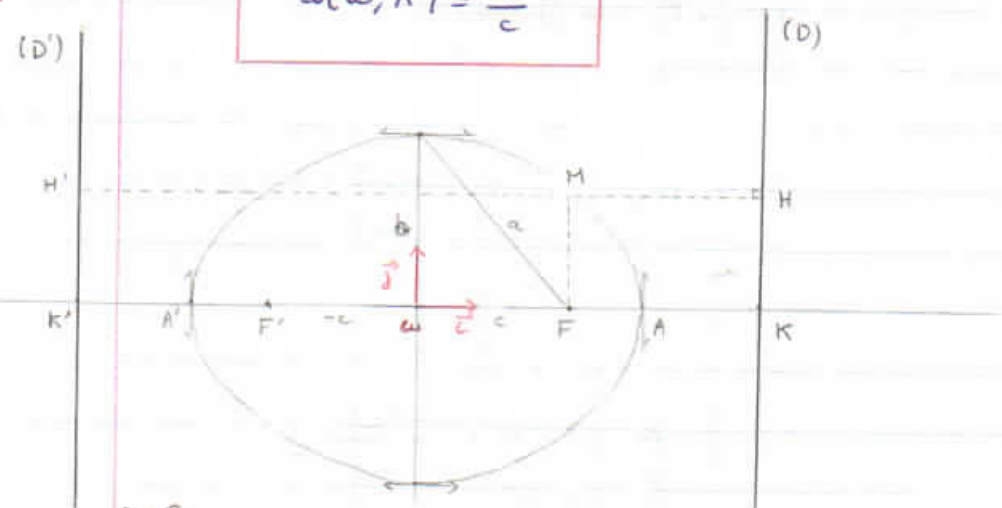
$\overline{F'K'} = p_2 = -\frac{b^2}{c}$

$$\overline{\omega K} = \overline{\omega F} + \overline{FK} = c + \frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

$$\overline{\omega K'} = \overline{\omega F'} + \overline{F'K'} = -c - \frac{b^2}{c} = -\frac{a^2}{c}$$

d(ω,

$$d(\omega, K) = \frac{a^2}{c}$$



$a = 3$

$c = 2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5} = 2,3$ $\quad e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ $\quad MF = \frac{2}{3} MH$

Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $\qquad p = \pm \frac{b^2}{c}$

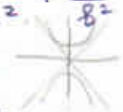
$e = \frac{c}{a}$

(D_ω) d'abscisse $\pm \frac{a^2}{c}$ $\qquad \overline{\omega F} = \pm c$

③ On se donne une hyperbole.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, par exemple

(on pourrait aussi $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

Dans la 2e éventualité  , $\nexists F \in (\omega X)$, mais $\exists F$ sur ωY axe transverse.

Revenons à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Il faut que $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2}$

$b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}$

on tire $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$

on tire $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ $\quad c = \sqrt{a^2+b^2}$

puis $p = \pm \frac{b^2}{c}$

(D) $\overline{\omega F} = c \quad \overline{\omega K} = \frac{a^2}{c}$

$\overline{\omega F'} = -c \quad \overline{\omega K'} = -\frac{a^2}{c}$

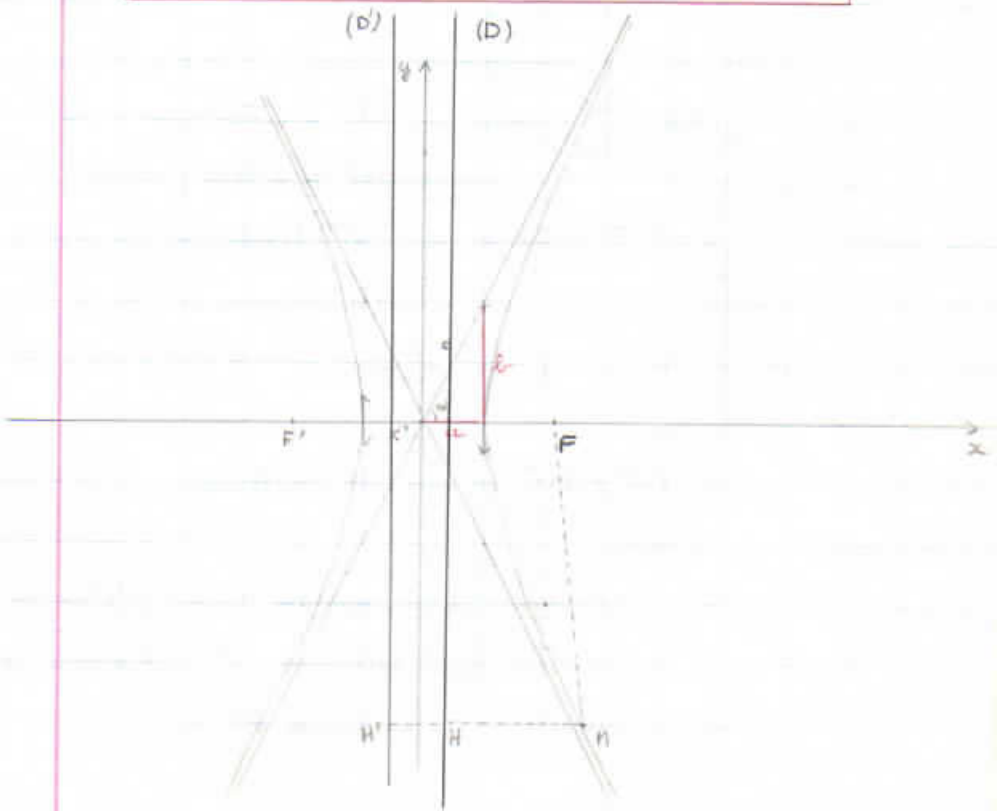
Z

Hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad p = \pm \frac{b^2}{c}$

$e = \frac{c}{a}$

(D_i) d'abscisse $\pm \frac{a^2}{c} \quad \overline{\omega F} = \pm c$



Définition bifocale des coniques à centre (E) ou (H).

(E) : $\frac{MF}{MH} = e$ $\quad MF = e\,MH$

$MF' = e\,MH'$

$MF + MF' = e\,(\underbrace{MH + MH'}_{2\frac{a^2}{c}})$

$MF + MF' = 2\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c}$

Z

$$\boxed{MF + MF' = 2a}$$ (segments additifs)

La réciproque est admise.

(H) : $\frac{MF}{MH} = e$ $\quad MF = e\,MH$

$MF' = e\,MH'$

* $MF' - MF = e\,(MH' - MH)$

$= e\,HH'$

$= e\,\frac{a^2}{c}$ (voir 2 cas de figure)

* $MF - MF' = e\,(MH - MH')$

idem.

Les 2 calculs ci-dessus ont lieu, l'un si M appartient à la branche qui entoure F, l'autre si M appartient à la branche qui entoure F'.

$MF' - MF = 2a$

ou

$MF - MF' = 2a$

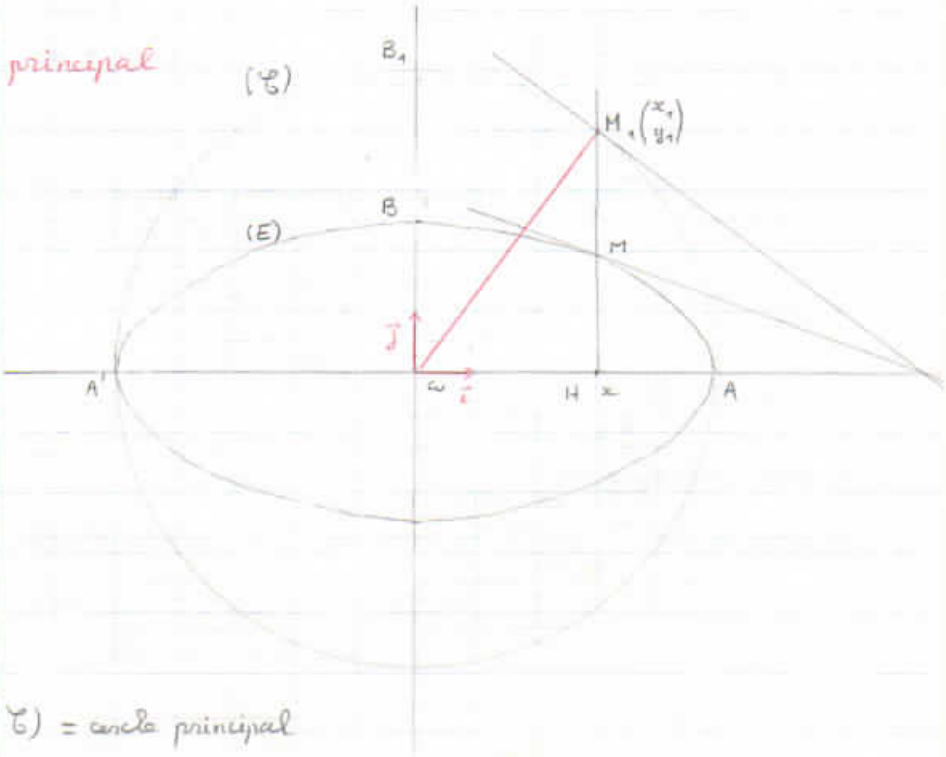
$$|MF' - MF| = 2a$$

Réciproque vraie et admise.

Remarque

Revoir sérieusement cette définition du point de vue vectoriel (voir tangentes)

Ellipse et cercle principal



(C) = cercle principal

$(\mathcal{C})$: $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ (1)

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_1 = a\sin\varphi \end{cases} \quad (2)$$

(E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (3)

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \quad (4)$$

$f : M_1 \longmapsto M$

$$f \begin{cases} x = x_1 \\ y = \dfrac{b}{a} y_1 \end{cases}$$

f affine

Soit φ l'endomorphisme associé à f.

$$M_{(\varphi, \vec{i}, \vec{j})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{b}{a} \end{bmatrix}$$

f est dite affinité orthogonale d'axe AA', de direction BB' de rapport $\dfrac{b}{a}$

Les tangentes en M_1 et M au cercle et à l'ellipse rencontrent l'axe $(\omega, \vec{i})$ au même point T.

Un vecteur directeur de MT, tgte en M à (E) est :

$$\begin{cases} x'(\varphi) = -a\sin\varphi \\ y'(\varphi) = b\cos\varphi \end{cases}$$

$M \neq A, A', B, B'$

$$(MT) : \quad \frac{x - a\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = \frac{y - b\sin\varphi}{b\cos\varphi}$$

On fait $y = 0$ dans l'équation (MT) et l'on trouve x_T.

On fait un calcul analogue, plus simple, avec la tgte en M_1 : $\quad \frac{x - a\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = \frac{y - a\sin\varphi}{a\cos\varphi}$

$y = 0 \vdash x_{T_1}$ connu.

On constate que $x_{T_1} = x_T \Rightarrow T = T_1$

18.8

Construction d'une tangente à une conique

Théorème

Soit (Γ) une conique de foyer F et de directrice associée (D). La tangente à Γ en tout pt M de Γ qui n'appartient pas à l'axe focal coupe (D) en un pt T tel que :

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = 0.$$

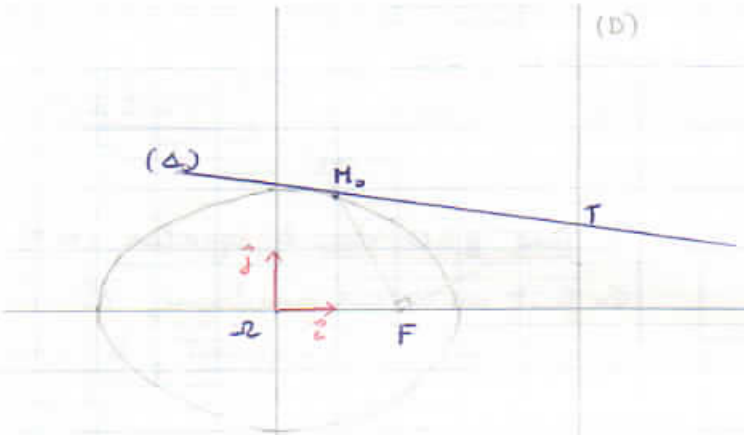
Démonstration.

Soit $(\mathcal{H})$ = ellipse de centre Ω.

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $(\mathcal{H})$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $a > b > 0$

$F(c, 0)$

et $x = \frac{a^2}{c}$: équation de (D) dans ce repère.



(Δ_0) = tgte à $(\mathcal{H})$ en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation :

~~$x x_0$~~ $\qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(\Delta_0) : \frac{y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x - x_0} = -\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

$$y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{b}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}x + \frac{b}{a}\frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

donc $2yy' = -\frac{2b^2}{a^2} x$

$$y'_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$$

$$a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2$$

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$$

$= 1$ car $M_0 \in (H)$.

donc $(\Delta_0) : \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$

$\exists\ T = (D) \cap (D_0)$ car $(\Delta_0) \not\parallel (D)$.

$$T(x, y) / \begin{cases} \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1 \\ x = \frac{a^2}{c} \end{cases} \vdash y = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right)$$

$$\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FT} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}$$

Calculons $\overrightarrow{FM} . \overrightarrow{FT}$.

On a :

$$\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FT} = (x_0 - c)\left(\frac{a^2}{c} - c\right) + b^2\left(1 - \frac{x_0}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{c}(x_0 - c)(a^2 - c^2) + \frac{b^2}{c}(c - x_0)$$

et $a^2 - c^2 = b^2$

Donc $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FT} = 0$

Application

Pour construire la tgte (Δ_0) à Γ en M_0,

* on trace la droite FM_0
* on trace la droite orthogonale à FM_0 passant par F. Elle coupe (D) en T.
* (M_0T) est la tangente cherchée.